

TD 3 : ANALYSE CONVEXE

COURS D'APPRENTISSAGE, ECOLE NORMALE SUPÉRIEURE, AUTOMNE 2014

Rémi Lajugie
remi.lajugie@ens.fr

RÉSUMÉ. Ce TD a pour but de faire manipuler les notions fondamentales en analyse convexe vues en cours.

Concernant l'optimisation convexe, des livres de références très accessibles en approfondissement du cours existent. On peut notamment citer le livre de Stephen Boyd "Convex Optimization", disponible en ligne gratuitement à l'adresse http://www.stanford.edu/~boyd/cvxbook/bv_cvxbook.pdf. Pour réviser la partie optimisation du cours, il peut être intéressant de jeter un coup d'oeil.

1. SÉPARATION DES CONVEXES COMPACTS DANS \mathbb{R}^n

On considère deux ensembles convexes compacts et disjoints C et D de \mathbb{R}^n . Montrer qu'il existe une séparation stricte de ces deux ensembles, i.e., qu'il existe un hyperplan séparant C et D .

Indice : On pourra commencer par considérer les points $(x, y) \in C \times D$ minimisant $\|x - y\|_2$.

2. CONVEXITÉ DES FONCTIONS USUELLES

1) Montrer que $f(x, y) = x^2/y$ est convexe sur certains domaines convexes que l'on précisera.

2) Soit C un convexe de \mathbb{R}^n , on appelle indicatrice convexe de l'ensemble C la fonction définie par $I_C(x) = 0$ si $x \in C$ et $+\infty$ sinon. Vérifier que I_C est bien convexe.

3) Soit $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, on considère la forme quadratique associée $f(x) = x^T Q x$. A quelle condition sur Q a-t-on la convexité de la fonction f ?.

4) Montrer que le sup de fonctions convexes sur \mathbb{R}^n est toujours convexe. Est-ce le cas de l'infimum ?

5) On appelle S_+^n l'ensemble des matrices symétriques positives de $\mathbb{R}^{n \times n}$. A l'aide de la question précédente, montrer que l'application $f : S_+^n \rightarrow \mathbb{R}^+, M \rightarrow \lambda_{\max}(M)$, où $\lambda_{\max}(M)$ est la plus grande valeur propre de la matrice M , est convexe.

3. DUALITÉ LAGRANGIENNE

Pour des vecteurs, on définit la relation d'ordre partiel $x \leq y$ si $x - y$ est dans l'orthant positif (i.e, si toutes ses composantes sont positives). Pour des matrices on note $A \geq B$ si $A - B$ est dans l'orthant positif et $A \succeq B$ si $A - B$ est une matrice symétrique semi-définie positive.

6) Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$. On considère un programme linéaire défini sous la forme canonique suivante :

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} c^T x \\ \text{t.q, } Ax = b \\ x \geq 0. \end{aligned}$$

Dériver un problème dual en utilisant la dualité Lagrangienne.

7) Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} x^T Ax - 2b^T x \\ \text{t.q, } x^T x = 1 \end{aligned}$$

Ce problème s'apparente aux problèmes de quotient de Rayleigh. Il fait partie des problèmes pour lesquels on a dualité forte sans avoir la convexité du problème primal.

8) Soit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$ et $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$. On considère la fonction affine par morceaux :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) = \max_{i=1, \dots, m} a_i^T x + b_i.$$

Dériver un problème dual à la minimisation de cette fonction en introduisant une variable auxiliaire $t = \max_i a_i^T x + b_i$.

9) Soit $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $W \geq 0$ et symétrique. Dériver un problème dual au problème combinatoire suivant (problème de coupe maximale dans un graphe de poids W) :

$$\max_{z \in \{0,1\}^n} z^T W (1 - z)$$

Indications : Ecrire le problème avec des variables $y \in \{-1, 1\}$ puis écrire l'ensemble discret d'optimisation comme une contrainte d'égalité quadratique.