

TP/TD 1 : RÉGRESSIONS LINÉAIRES ET POLYNOMIALES

COURS D'APPRENTISSAGE, ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, AUTOMNE 2015

Jean-Baptiste Alayrac
jean-baptiste.alayrac@inria.fr

RÉSUMÉ. Dans ce TP, on considère le problème de la régression de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Il s'agit, étant donné des observations $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n) \in \mathbb{R}^2$ et un sous ensemble fonctionnel $\mathcal{F} \subset L^2([0, 1])$ de rechercher le minimiseur du risque quadratique.

Ce que vous serez amené à faire dans ce TP servira à d'autres occasions durant le cours. Conserver les codes produits est donc une bonne idée.

Tout au long de ce TP on considère le couple de variables aléatoires (X, Y) , tel que X suive une loi uniforme sur $[0, 1]$ et $Y = f(X) + \epsilon$ où $f(x) = \exp(3x)$ et ϵ est un bruit Gaussien indépendant de X de variance unité et de moyenne nulle. On rappelle qu'un bruit gaussien dans \mathbb{R} est une variable aléatoire distribuée suivant une loi de probabilité admettant comme densité par rapport à la mesure de Lebesgue $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2})$, avec $\sigma \in \mathbb{R}$.

1. PROLOGUE : RAPIDES RAPPELS DE PROBABILITÉS

On rappelle dans cette partie les quelques résultats de probabilité nécessaires pour le cours. En apprentissage, il n'est pas nécessaire de connaître in extenso toute la théorie des probabilités. Un bon aperçu de ce qu'il faut savoir peut être trouvé dans des livres d'apprentissage comme [1] (chapitre 1) ou [3] (chapitre 2). Ceux qui souhaiteront approfondir les notions de proba que l'on effleura durant le cours et les TD pourront consulter un cours de probabilité et de théorie de la mesure [2] ou un ouvrage d'introduction aux probabilités comme [4].

1.1. Fondements mathématiques.

Tribus. Soit Ω un **espace d'états**. On suppose qu'il existe une famille de parties de Ω , notée $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega) = 2^\Omega$ disposant des propriétés suivantes :

- $\Omega \in \mathcal{A}$.
- \mathcal{A} est stable par passage au complémentaire.
- \mathcal{A} est stable par union dénombrable.

Une telle famille est une tribu sur Ω .

Remarque. Les éléments $\omega \in \Omega$ sont vues comme les **résultats possible d'une expérience aléatoire**. Pour un lancé de dé on aura donc $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Pour un lancé de fléchette sur une cible de 15 cm de rayon on aura $\Omega = \{(x, y), \sqrt{x^2 + y^2} \leq 15\}$. Les éléments $A \in \mathcal{A}$ sont des ensembles. Ils représentent quant à eux des **événements aléatoires**. Par exemple l'ensemble $A = \{1, 2, 3\}$ caractérise l'événement "*le résultat de mon lancé de dé est inférieur à 3*".

Probabilité. Une *probabilité* sur (Ω, \mathcal{A}) est une application \mathbb{P} de \mathcal{A} dans \mathbb{R}^+ qui vérifie :

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
- Pour une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de \mathcal{A} disjoints deux à deux, on a $\mathbb{P}(\cup_n A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$.

Variable aléatoire. Dans la suite on considérera deux types de fonctions dont l'espace de départ est Ω :

- Celles à valeurs dans \mathbb{R}^d . Dans ce cas on considère que \mathbb{R}^d est munie de sa tribu borélienne \mathcal{B} , la plus petite tribu rendant les pavés mesurables.
- Celles à valeurs dans un espace discret \mathbb{D} (identifié à un sous ensemble de \mathbb{N}). Dans ce cas, on considère la tribu des sous ensembles de \mathbb{D} .

Dans tous les cas, si on appelle \mathbb{P}_X la mesure associée à l'espace d'arrivée \mathcal{B} de la fonction X , on écrit

$$\forall B \in \mathcal{B}, \mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\}) = \mathbb{P}(X^{-1}(B)).$$

Une telle fonction X (mesurable) est appelée une *variable aléatoire*.

1.2. Variables aléatoires à densité.

Variables aléatoires discrètes. Une variable aléatoire discrète admet une densité par rapport à la mesure de comptage sur \mathbb{D} si il existe une fonction $p : \mathbb{D} \rightarrow [0, 1]$ telle que pour tout $B \subseteq \mathbb{D}$:

$$\mathbb{P}(X \in B) = \sum_{x \in B} p(x).$$

On dit que $p(x)$ est la probabilité que X vaille x . Très souvent, on appelle cette densité la *masse* de probabilité.

Variables aléatoires continues. Une variable aléatoire continue admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d si il existe une fonction $p : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$ telle que pour tout $B \in \mathcal{B}$:

$$\mathbb{P}(X \in B) = \int_B p(x) dx.$$

De manière abusive, on dit souvent que $p(x)$ est la probabilité que X vaille x .

A partir de maintenant on supposera que toutes les variables aléatoires que l'ont rencontre admettent une densité, par rapport à la mesure de Lebesgue si elles sont continues, par rapport à la mesure de comptage si elles sont discrètes.

1.3. Espérance, conditionnement.

Espérance. On appelle *espérance* de la variable aléatoire continue X , la quantité, notée $\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}^d} xp(x) dx$. Dans le cas discret, $\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in \mathbb{D}} xp(x)$.

Conditionnement. Soit X et Y deux variables aléatoires. On devrait noter leurs densités avec deux notations différentes : par exemple $p(x)$ et $q(y)$. Cependant, en apprentissage, on utilise plutôt l'abus de notation suivant : la densité de X est $p(x)$ et celle de Y , $p(y)$. C'est comme si les variables x et y étaient typées et avaient une influence sur la fonction considérée. On appelle la *densité jointe* $p(x, y)$ de X et de Y , la densité de la variable aléatoire (X, Y) .

On dit que X et Y sont *indépendantes* si $p(x, y) = p(x)p(y)$. Continuant cet abus de notation, on appelle *probabilité conditionnelle* de l'événement $X \in A \in \mathcal{A}$ sachant l'événement $Y \in B \in \mathcal{A}$ la quantité

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(X \in A \cap Y \in B)}{\mathbb{P}(Y \in B)}.$$

En supposant que $p(y) > 0$, on appelle *densité conditionnelle* la densité de probabilité définie par $p(x|y) = \frac{p(x,y)}{p(y)}$.

Espérance conditionnelle. L'*espérance conditionnelle* est alors la **variable aléatoire** notée $\mathbb{E}[X|Y]$ où l'aléa vient de Y ; sa valeur pour $Y = y$ est : $\mathbb{E}[X|Y = y] = \int_x xp(x|y)dx$

L'espérance conditionnelle possède les propriétés suivantes :

- Si X et Y sont indépendantes, alors $\mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[X]$.
- $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]] = \mathbb{E}[X]$ (loi de l'espérance itérée)
- Pour une fonction $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathbb{E}[f(X)|X] = f(X)$.

Conditionnement “mixte”. Il est fréquent qu'en apprentissage on s'intéresse au comportement de deux variables jointes vivant dans des espaces différents. Par exemple pour de la classification binaire, la sortie Y vit dans $\{0, 1\}$ alors que les descripteurs à partir desquels on veut faire la prédiction sont dans \mathbb{R}^d . Dans ce cas, la densité conditionnelle du couple (X, Y) s'écrit toujours $p(x, y)$, même si la mesure de base est mixte.

Règle de Bayes. On appelle *Règle de Bayes* la formule d'échange entre information a priori et a posteriori

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

La règle de Bayes reste vraie en remplaçant les probabilités par les densités conditionnelles.

2. PARTIE II : PREMIÈRES SIMULATIONS

1) a) Rappelez la définition du risque pour le cas de la perte quadratique.

b) Rappeler l'expression de la fonction cible associée à une perte. Si l'on considère l'ensemble des fonctions $C^\infty([0, 1])$, quelle est la fonction cible de notre régression ?

2) a) Générer 20 points du plan (x_i, y_i) , réalisations i.i.d. des variables aléatoires X et Y . Visualisez les.

En Matlab, la fonction `randn(1, n)` génère un n échantillon de réalisations indépendantes d'une loi normale centrée réduite (moyenne nulle, variance unité). La fonction `rand(1, n)` les génère uniformément sur l'intervalle $[0, 1]$.

b) Séparer ces points en deux ensembles de taille égale. Par la suite, on appellera la première moitié des données “ensemble d'entraînement”, et l'autre “ensemble de test”.

3) Comment, à partir des seules données d'apprentissage peut-on donner une estimation du risque ?

4) Commencer par faire une régression linéaire simple. On considère la classe de fonctions $\mathcal{S} = \{g, \exists \theta_1, \theta_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \theta_1 x + \theta_0\}$. On cherche dans cette question à estimer les paramètres $\hat{\theta}_0$ et $\hat{\theta}_1$ qui minimisent $\hat{R}(\theta_0, \theta_1) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (y_i - \theta_1 x_i - \theta_0)^2$.

a) En écrivant la condition d'annulation du gradient pour \hat{R} , vérifier que l'expression de $\hat{\theta}_0$ et $\hat{\theta}_1$ est compatible avec celle vue en cours. (On pourra considérer que la matrice \mathbf{X} que l'on veut régresser est la concaténation des vecteurs "augmentés" $(1, x_i)^T, \dots$)

b) Estimer les paramètres de la régression linéaire sur les seules données d'entraînement et affichez la droite obtenue sur le même graphique que les données. On pourra pour cela utiliser la commande `polyval` de Matlab.

5) Expliquer comment on peut utiliser l'équation normale de la régression linéaire ($\hat{\theta} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^\dagger \mathbf{X}^T \mathbf{Y}$) pour estimer les coefficients d'une régression sur des polynômes de degré k (un indice : Souviens-toi de Vandermonde!).

6) Implémenter cette formule pour estimer les coefficients du polynôme de régression de 1 à 8 et représentez les fonctions obtenues sur le même graphe.

On pensera à standardiser la matrice de design. Étant donné une matrice de design $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times d}$ comportant n données de dimension d , standardiser les données est en général une bonne pratique, notamment pour s'assurer d'une certaine stabilité numérique. Standardiser revient à retirer à chaque colonne de la matrice de design sa moyenne (voir commande `mean`) et de diviser chaque colonne par son écart type (voir commande `std`).

7) Calculer pour chacun de ces polynômes, l'erreur de régression sur les données d'entraînement. Que constatez vous ?

8) On va désormais étudier la capacité de généralisation (ou de prédiction) des fonctions de régression.

a) En utilisant les fonctions de régression estimées sur les données d'entraînement, calculer le risque empirique de régression sur les données de test.

b) Représenter l'évolution des erreurs d'entraînement et de test sur la même figure. Commentez les courbes obtenues.

9) Reprendre votre code en augmentant le nombre de données générées. Regardez l'évolution des erreurs de test et d'entraînement. Commentez le résultat.

3. PARTIE III : ERREURS ET EXCÈS EN TOUS GENRES

Le but de cette partie est d'étudier l'évolution empirique de certaines quantités théoriques vues en cours : l'excès de risque ainsi que l'erreur d'approximation par une classe de fonction

S. On rappelle qu'on a vu en cours la formule de décomposition suivante pour le risque :

$$\underbrace{\mathcal{R}(\hat{f}_S) - \mathcal{R}(f^*)}_{\text{excès de risque}} = \underbrace{\mathcal{R}(\hat{f}_S) - \mathcal{R}(f_S^*)}_{\text{erreur d'estimation}} + \underbrace{\mathcal{R}(f_S^*) - \mathcal{R}(f^*)}_{\text{erreur d'approximation}}$$

Dans cette partie, on considère que \mathcal{F} est l'espace des fonctions de carré intégrable sur $[0, 1]$ que l'on note $L_2([0, 1])$. Cet espace est muni de son produit scalaire usuel $\langle f, g \rangle = \int_{[0,1]} f(x)g(x)dx$ et de la norme associée.

10) On considère le problème de la régression polynomiale de degré au plus k . Commencer par calculer $\mathcal{R}(f^*)$ le risque de la fonction cible.

11) Considérer maintenant l'estimateur donné par l'équation normale pour la régression polynomiale. Calculer l'excès de risque $\mathcal{R}(\hat{f}_S) - \mathcal{R}(f^*)$. L'expression finale ne dépendra que des coefficients $(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_k)$ de la régression. Pour le calcul, il peut être utile de se rappeler le résultat suivant : si $X \in \mathbb{R}^d$ et $Y \in \mathbb{R}^d$, on a $\mathbb{E}[X^T Y | D_n] = \text{Tr}(\mathbb{E}[Y X^T | D_n])$. En particulier on cherchera à donner ce risque (qui peut être vu comme la distance entre f et un polynôme) comme une forme quadratique (en utilisant le calcul matriciel!). Le calcul, s'il est fait proprement, doit permettre une réponse plus aisée à la question suivante...

12) Calculer $\mathcal{R}(f_S^*)$. (NB : Dans cette question, si le besoin s'en fait ressentir, supposez que les matrices que vous rencontrez sont inversibles.)

13) Reprendre l'expression de l'erreur d'approximation et utiliser Matlab pour représenter son évolution à mesure que le degré des polynômes croît.

14) A partir des questions précédentes, représenter graphiquement l'évolution de l'erreur d'estimation.

15) Nous avons de la chance, nous connaissons la fonction cible de la régression dans notre cas, mais en pratique elle est inconnue. Si on suppose maintenant que l'on peut échantillonner autant que l'on veut le couple de variables (X, Y) quelle stratégie numérique aurait-on pu adopter pour estimer l'erreur d'approximation ?

16) Conclure.

RÉFÉRENCES

- [1] C. M. Bishop and al. *Pattern recognition and machine learning*. Springer, 2006.
- [2] J-F. Le Gall. *Intégration, probabilités et processus aléatoires*. <http://www.math.u-psud.fr/~jflgall/IPPA2.pdf> ENS, 2006.
- [3] K. Murphy. *Machine learning : a probabilistic perspective*. MIT Press, 2012.
- [4] J.Y. Ouvrard. *Probabilités : Tome 1*. Cassini, 2007.