

## TD 3 : ANALYSE CONVEXE

COURS D'APPRENTISSAGE, ECOLE NORMALE SUPÉRIEURE, 09 OCTOBRE 2015

Jean-Baptiste Alayrac  
jean-baptiste.alayrac@inria.fr

RÉSUMÉ. Ce TD a pour but de faire manipuler les notions fondamentales en analyse convexe vues en cours.

**Concernant l'optimisation convexe, on peut trouver de bons ouvrages de référence tout à fait accessibles dans le cadre de ces cours/TP. On peut notamment citer le livre de Stephen Boyd "Convex Optimization", disponible en ligne gratuitement à l'adresse [http://www.stanford.edu/~boyd/cvxbook/bv\\_cvxbook.pdf](http://www.stanford.edu/~boyd/cvxbook/bv_cvxbook.pdf). Pour réviser la partie optimisation du cours, il peut être intéressant de jeter un coup d'oeil.**

### 1. SÉPARATION DES CONVEXES COMPACTS DANS $\mathbb{R}^n$

On considère deux ensembles convexes compacts et disjoints  $C$  et  $D$  de  $\mathbb{R}^n$ . Montrer qu'il existe une séparation stricte de ces deux ensembles, i.e., qu'il existe un hyperplan séparant  $C$  et  $D$ .

Indice : On pourra commencer par considérer les points  $(x, y) \in C \times D$  minimisant  $\|x - y\|_2$ .

### 2. CONVEXITÉ DES FONCTIONS USUELLES

1) Montrer que  $f(x, y) = x^2/y$  est convexe sur certains domaines convexes que l'on précisera.

2) Soit  $C$  un convexe de  $\mathbb{R}^n$ , on appelle indicatrice convexe de l'ensemble convexe  $C$  la fonction définie par  $I_C(x) = 0$  si  $x \in C$  et  $+\infty$  sinon. Vérifier que  $I_C$  est bien convexe.

3) Soit  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , on considère la forme quadratique associée  $f(x) = x^T Q x$ . A quelle condition sur  $Q$  a-t-on la convexité de la fonction  $f$  ?

4) Montrer que le sup de fonctions convexes sur  $\mathbb{R}^n$  est toujours convexe. Est-ce le cas de l'infimum ?

5) On appelle  $S^n$  l'ensemble des matrices symétriques de  $\mathbb{R}^{n \times n}$ . A l'aide de la question précédente, montrer que l'application  $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}, M \rightarrow \lambda_{\max}(M)$ , où  $\lambda_{\max}(M)$  est la plus grande valeur propre de la matrice  $M$ , est convexe.

## 3. DUALITÉ LAGRANGIENNE

Pour des vecteurs, on définit la relation d'ordre partiel  $x \leq y$  si  $x - y$  est dans l'orthant positif (i.e, si toutes ses composantes sont positives). Pour des matrices on note  $A \geq B$  si  $A - B$  est dans l'orthant positif et  $A \succeq B$  si  $A - B$  est une matrice symétrique semi-définie positive.

6) Soit  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$ . On considère un programme linéaire défini sous la forme canonique suivante :

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & c^T x \\ \text{t.q,} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Dériver un problème dual en utilisant la dualité Lagrangienne. Pour la formulation de ce problème on demandera d'écrire les contraintes duales de manière explicite.

7) Soit  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$  et  $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$ . On considère la fonction affine par morceaux :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) = \max_{i=1, \dots, m} a_i^T x + b_i.$$

Dériver un problème dual à la minimisation de cette fonction en introduisant une variable auxiliaire  $t = \max_i a_i^T x + b_i$ .

8) Soit  $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $W \geq 0$  et symétrique. Dériver un problème dual au problème combinatoire suivant (problème de coupe maximale dans un graphe de poids  $W$ ) :

$$\max_{z \in \{0,1\}^n} z^T W (1 - z)$$

Indications : Écrire le problème avec des variables  $y \in \{-1, 1\}$  puis écrire l'ensemble discret d'optimisation comme vérifiant une contrainte d'égalité quadratique.

9) Soit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & x^T A x \\ \text{t.q,} \quad & x^T x = 1 \end{aligned}$$

Donner le problème dual. Montrer qu'on a dualité forte. (*Cas où on a la dualité forte sans avoir la convexité du problème primal.*)