

Informatique quantique IFT6155

Notions de base

Le corps des complexes

Un nombre complexe est de la forme $x = a + bi$ avec $a := \operatorname{Re}(x)$ et $b := \operatorname{Im}(x)$ des réels et $i = \sqrt{-1}$.

$$(a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

$$(a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$$

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

$$(a + bi)^* = (a - bi)$$

$$|a + bi| = \sqrt{(a + bi)(a - bi)} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$e^{\theta i} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$|x| = 1 \Rightarrow x = e^{i\theta} \qquad e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

Espace de Hilbert

Un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est un espace vectoriel sur les complexes. Nous nous intéressons seulement aux espaces de Hilbert à dimension finie.

On note un vecteur ψ vivant dans un espace de Hilbert par $|\psi\rangle$.

Définition: $\dagger$ est l'opération de transposer et de conjuguer un vecteur ou une matrice.

On définit $\langle\psi| = |\psi\rangle^\dagger$.

Opérateur dagger

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1+i \\ 1-i \end{pmatrix} \Rightarrow |\psi\rangle^\dagger = \langle\psi| = (1, -i, 1-i, 1+i)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 2-i & 2 \end{pmatrix}^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 2+i \\ 1-i & 2 \end{pmatrix}$$

$$a^\dagger = a^*; \quad A^{\dagger\dagger} = A; \quad (A+B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger; \quad (AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$$

Produit scalaire

Définition: Un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ possède un produit scalaire défini et noté par $\langle \psi | \phi \rangle$.

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad |\phi\rangle = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

$$\langle \psi | \phi \rangle = (a^*, b^*) \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = a^*c + b^*d$$

Définition: On dira que $|x\rangle$ et $|y\rangle$ sont orthogonaux ssi $\langle x | y \rangle = 0$.

Produit scalaire

Lemme: Le produit scalaire possède les propriétés suivantes:

$$\langle \psi | \phi \rangle = \langle \phi | \psi \rangle^*$$

$$\langle \psi | \psi \rangle \geq 0$$

$$\langle \psi | \psi \rangle = 0 \Leftrightarrow |\psi\rangle = 0$$

$$\langle \psi | (a |\phi_1\rangle + b |\phi_2\rangle) = a \langle \psi | \phi_1 \rangle + b \langle \psi | \phi_2 \rangle$$

Norme

Définition: $||\psi\rangle|| = \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle}$.

Lemme: la norme possède les propriétés suivantes:

$$||\psi\rangle|| \geq 0$$

$$||\psi\rangle|| = 0 \Leftrightarrow |\psi\rangle = 0$$

$$||a|\psi\rangle|| = |a| ||\psi\rangle||$$

$$||\psi\rangle + |\phi\rangle|| \leq ||\psi\rangle|| + ||\phi\rangle||$$

$$|\langle\psi|\phi\rangle| \leq ||\psi\rangle|| ||\phi\rangle||$$

$$\langle\psi|\phi\rangle \langle\phi|\psi\rangle \leq \langle\psi|\psi\rangle \langle\phi|\phi\rangle$$

Distance

Définition: $dist(|\psi\rangle, |\phi\rangle) = || |\psi\rangle - |\phi\rangle ||$

Lemme: la distance possède les propriétés suivantes:

$$dist(|\psi\rangle, |\phi\rangle) = dist(|\phi\rangle, |\psi\rangle)$$

$$dist(|\psi\rangle, |\phi\rangle) \geq 0$$

$$dist(|\psi\rangle, |\phi\rangle) = 0 \Leftrightarrow |\psi\rangle = |\phi\rangle$$

$$dist(|\psi\rangle, |\phi\rangle) \leq dist(|\psi\rangle, |\varphi\rangle) + dist(|\varphi\rangle, |\phi\rangle)$$

Ket bra

Pour tous vecteurs $|u\rangle$ et $|v\rangle$ de dimension n , $|u\rangle\langle v|$ est une matrice n par n .

Exemple:

$$|u\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad |v\rangle = c|0\rangle + d|1\rangle = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

$$|u\rangle\langle v| = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} (c^*, d^*) = \begin{pmatrix} ac^* & ad^* \\ bc^* & bd^* \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} |u\rangle\langle v| &= (a|0\rangle + b|1\rangle)(c^*\langle 0| + d^*\langle 1|) \\ &= ac^*|0\rangle\langle 0| + ad^*|0\rangle\langle 1| + bc^*|1\rangle\langle 0| + bd^*|1\rangle\langle 1| \end{aligned}$$

$$|u\rangle\langle v||x\rangle = \langle v|x\rangle|u\rangle$$

Base orthonormale

Définition: Soit $\mathcal{H}_d$ un espace de Hilbert de dimension d . On dira que l'ensemble $\{|b_0\rangle, |b_1\rangle, \dots, |b_{d-1}\rangle\}$ forme une base orthonormale de $\mathcal{H}_d$ ssi

$$\forall i, \langle b_i | b_i \rangle = 1$$

$$\forall i, j, i \neq j, \langle b_i | b_j \rangle = 0$$

Lemme: Les énoncés suivants sont équivalents:

1. $\{|b_0\rangle, |b_1\rangle, \dots, |b_{d-1}\rangle\}$ forme une base orthonormale de $\mathcal{H}_d$
2. $|\phi\rangle = \sum_{i=0}^{d-1} \langle b_i | \phi \rangle |b_i\rangle$
3. $\sum_{i=0}^{d-1} |b_i\rangle \langle b_i| = I_d$
4. $\langle \psi | \psi \rangle = \sum_{i=0}^{d-1} |\langle b_i | \psi \rangle|^2$

Base de calcul

Définition: Pour un espace $\mathcal{H}_d$ à d dimensions, la base

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad |d-1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

est appelée base de calcul.

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{d-1} \end{pmatrix} = \alpha_0 |0\rangle + \alpha_1 |1\rangle + \dots + \alpha_{d-1} |d-1\rangle$$

$$\forall i, \langle i|i\rangle = 1 \quad \forall i \neq j, \langle i|j\rangle = 0$$

Autre exemple de base

Une base pour $\mathcal{H}_4$.

$$\begin{aligned}|e_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle \\|e_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle \\|e_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle \\|e_4\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle\end{aligned}$$

Les 4 vecteurs ont norme 1 et sont deux à deux orthogonaux. Ils forment donc une base orthonormale de $\mathcal{H}_4$.

$|e_1\rangle$ est un vecteur de norme 1.

$$\begin{aligned} || |e_1\rangle || &= \sqrt{\langle e_1 | e_1 \rangle} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \langle 00| + \frac{1}{\sqrt{2}} \langle 11| \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} |00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |11\rangle \right)} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} \langle 00|00\rangle + \frac{1}{2} \langle 00|11\rangle + \frac{1}{2} \langle 11|00\rangle + \frac{1}{2} \langle 11|11\rangle} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} (\langle 00|00\rangle + \langle 00|11\rangle + \langle 11|00\rangle + \langle 11|11\rangle)} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} (1 + 0 + 0 + 1)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$|e_1\rangle$ et $|e_2\rangle$ sont orthogonaux.

$$\begin{aligned}\langle e_2|e_1\rangle &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle 01| + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 10|\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle\right) \\ &= \frac{1}{2}\langle 01|00\rangle + \frac{1}{2}\langle 01|11\rangle + \frac{1}{2}\langle 10|00\rangle + \frac{1}{2}\langle 10|11\rangle \\ &= \frac{1}{2}(0 + 0 + 0 + 0) \\ &= 0\end{aligned}$$

$|e_1\rangle$ et $|e_3\rangle$ sont orthogonaux.

$$\begin{aligned}\langle e_1|e_3\rangle &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle 00| + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 11|\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle\right) \\ &= \frac{1}{2}\langle 00|00\rangle - \frac{1}{2}\langle 00|11\rangle + \frac{1}{2}\langle 11|00\rangle - \frac{1}{2}\langle 11|11\rangle \\ &= \frac{1}{2}(1 - 0 + 0 - 1) \\ &= 0\end{aligned}$$

Produit tensoriel

Définition: Soit

$$A = \begin{pmatrix} a_{0,0} & \cdots & a_{0,d-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d-1,0} & \cdots & a_{d-1,d-1} \end{pmatrix}$$

et

$$B = \begin{pmatrix} b_{0,0} & \cdots & b_{0,d'-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{d'-1,0} & \cdots & b_{d'-1,d'-1} \end{pmatrix}$$

alors

$$A \otimes B := \begin{pmatrix} a_{0,0}B & \cdots & a_{0,d-1}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d-1,0}B & \cdots & a_{d-1,d-1}B \end{pmatrix}$$

Produit tensoriel

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{00} & b_{01} \\ b_{10} & b_{11} \end{pmatrix}$$

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{00}b_{00} & a_{00}b_{01} & a_{01}b_{00} & a_{01}b_{01} \\ a_{00}b_{10} & a_{00}b_{11} & a_{01}b_{10} & a_{01}b_{11} \\ a_{10}b_{00} & a_{10}b_{01} & a_{11}b_{00} & a_{11}b_{01} \\ a_{10}b_{10} & a_{10}b_{11} & a_{11}b_{10} & a_{11}b_{11} \end{pmatrix}$$

Produit tensoriel

$$\mathcal{H}_d \otimes \mathcal{H}_{d'} := \mathcal{H}_{dd'}$$

$$|\psi\rangle |\phi\rangle := |\psi\rangle \otimes |\phi\rangle$$

$$|1\rangle |0\rangle |1\rangle = |101\rangle = |5\rangle$$

$$(A \otimes B)(|\psi\rangle |\phi\rangle) = (A|\psi\rangle)(B|\phi\rangle)$$

Produit tensoriel

$$|\Psi\rangle = a_0 |0\rangle + a_1 |1\rangle \quad |\Phi\rangle = b_0 |0\rangle + b_1 |1\rangle$$

$$|\Psi\rangle |\Phi\rangle = a_0 b_0 |00\rangle + a_0 b_1 |01\rangle + a_1 b_0 |10\rangle + a_1 b_1 |11\rangle$$

Soit

$$\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B,$$

$$\{|a_i\rangle \mid i = 0 \dots d - 1\}$$

une base orthonormale pour $\mathcal{H}_A$ et

$$\{|b_i\rangle \mid i = 0 \dots d' - 1\}$$

une base orthonormale pour $\mathcal{H}_B$. Alors

$$\{|a_i\rangle |b_j\rangle \mid i = 0 \dots d - 1, j = 0 \dots d' - 1\}$$

est une base orthonormale pour $\mathcal{H}_{AB}$ ayant dd' éléments.

État d'un système quantique

Tout état quantique (pur) est représenté par un vecteur $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_d$ de norme 1 ($\langle\psi|\psi\rangle = 1$).

En général, $|\psi\rangle = \sum_{i=0}^{d-1} \alpha_i |i\rangle$ avec $\sum_{i=0}^{d-1} |\alpha_i|^2 = 1$.

Si on observe (dans la base de calcul) un système quantique, on ne peut obtenir qu'un état de base comme résultat. On observe en général $|i\rangle$ avec probabilité $|\alpha_i|^2$.

Notez que pour tout état $|\psi\rangle = \sum_i \alpha_i |i\rangle$ on a bien $\sum_i |\alpha_i|^2 = || |\psi\rangle || = 1$.

S'il existe i tel que $|\alpha_i|^2 = 1$, on dira que $|\psi\rangle$ est dans un état de base, sinon on dira que $|\psi\rangle$ est en superposition.

Qubits

En particulier, l'état d'un *qubit* (dans $\mathcal{H}_2$), est de la forme

$$\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$$

avec $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

Un registre quantique de n qubits,

$$\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_2^{\otimes n} = \mathcal{H}_{2^n}$$

est de la forme

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} \alpha_i |i\rangle$$

avec $\sum_{i=0}^{2^n-1} |\alpha_i|^2 = 1$.

Exemple

Soit

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|01\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}|10\rangle + \frac{i}{\sqrt{6}}|11\rangle$$

si on mesure $|\psi\rangle$ on observera

$|00\rangle$ avec probabilité $|\frac{1}{\sqrt{3}}|^2 = \frac{1}{3}$,

$|01\rangle$ avec probabilité $|\frac{1}{\sqrt{6}}|^2 = \frac{1}{6}$,

$|10\rangle$ avec probabilité $|\frac{-1}{\sqrt{3}}|^2 = \frac{1}{3}$,

$|11\rangle$ avec probabilité $|\frac{i}{\sqrt{6}}|^2 = (\sqrt{\frac{i}{\sqrt{6}} \frac{-i}{\sqrt{6}}})^2 = \frac{1}{6}$.

Notez que ces probabilités somment à 1.

Opérations unitaires

Toute opération quantique est linéaire et préserve la norme. En particulier, une opération quantique est réalisable ssi elle est unitaire. Une matrice U est unitaire ssi

$$U U^\dagger = I = U^\dagger U,$$

U_1 suivi de U_2 est équivalent à

$$U_3 = U_2 U_1.$$

Si U_1 agit sur l'espace $\mathcal{H}_A$ et U_2 sur l'espace $\mathcal{H}_B$, alors

$$U_3 = U_1 \otimes U_2,$$

agit sur l'espace produit $\mathcal{H}_{AB}$.

Exemples d'opérations unitaires

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N |0\rangle \rightarrow |1\rangle$$

$$N |1\rangle \rightarrow |0\rangle$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C |00\rangle \rightarrow |00\rangle$$

$$C |01\rangle \rightarrow |01\rangle$$

$$C |10\rangle \rightarrow |11\rangle$$

$$C |11\rangle \rightarrow |10\rangle$$

Exemples d'opérations unitaires

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$H |0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

$$H |1\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$

$$S_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}$$

$$S_\theta |0\rangle \rightarrow |0\rangle$$

$$S_\theta |1\rangle \rightarrow e^{i\theta} |1\rangle$$

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$Z |0\rangle \rightarrow |0\rangle$$

$$Z |1\rangle \rightarrow -|1\rangle$$

Exemple

$$N' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} N' |0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \\ N' |1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-|0\rangle + |1\rangle) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N'(N' |0\rangle) &= N' \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(N' |0\rangle + N' |1\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) + \frac{1}{\sqrt{2}}(-|0\rangle + |1\rangle) \right) \\ &= \frac{1}{2}(|0\rangle + |1\rangle - |0\rangle + |1\rangle) \\ &= |1\rangle \end{aligned}$$

Serait-ce la racine carré de la négation?

Exemple

$$N' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} N' |0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \\ N' |1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-|0\rangle + |1\rangle) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N'(N' |1\rangle) &= N' \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(-|0\rangle + |1\rangle) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-N' |0\rangle + N' |1\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) + \frac{1}{\sqrt{2}}(-|0\rangle + |1\rangle) \right) \\ &= \frac{1}{2}(-|0\rangle - |1\rangle - |0\rangle + |1\rangle) \\ &= -|0\rangle \end{aligned}$$

Exercice: Trouver U tel que $U^2 = N$.

Ket bra

Un opérateur U est unitaire ssi

$$U = \sum_i |a_i\rangle \langle i|$$

avec $\langle a_i | a_j \rangle = \delta_{ij}$ (1 si $i = j$ et 0 sinon, une base).

Preuve: $\Leftarrow$

$$\begin{aligned} U^\dagger U &= \left(\sum_i |a_i\rangle \langle i| \right)^\dagger \left(\sum_j |a_j\rangle \langle j| \right) \\ &= \sum_{ij} |i\rangle \langle a_i| |a_j\rangle \langle j| \\ &= \sum_i |i\rangle \langle i| \\ &= I \end{aligned}$$

Théorème:

Les opérations unitaires préservent le produit scalaire.

Preuve:

Si $|u'\rangle = U |u\rangle$, $|v'\rangle = U |v\rangle$ alors

$$\begin{aligned}\langle u'|v'\rangle &= |u'\rangle^\dagger |v'\rangle \\ &= (U |u\rangle)^\dagger (U |v\rangle) \\ &= \langle u| U^\dagger U |v\rangle \\ &= \langle u|v\rangle\end{aligned}$$

Note:

Si $U |u\rangle = \lambda |u\rangle$ alors $|\lambda| = 1$ et $\lambda = e^{i\theta}$.

Théorème:

Toute opération unitaire U sur $\mathcal{H}_n$ peut s'écrire

$$U = \sum_{i=1}^n \lambda_i |e_i\rangle \langle e_i|$$

où

1. les $|e_i\rangle$ forment une base orthonormale et sont les vecteurs propres de U
2. les $|\lambda_i| = 1$ sont les valeurs propres de U .

États distinguables

Par exemple:

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \quad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$

sont orthogonaux

$$\begin{aligned} \langle + | - \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 0 | + \langle 1 |) \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \\ &= \frac{1}{2}(\langle 0 | 0 \rangle - \langle 0 | 1 \rangle + \langle 1 | 0 \rangle - \langle 1 | 1 \rangle) \\ &= \frac{1}{2}(1 - 0 + 0 - 1) = 0 \end{aligned}$$

Comme

$$H |0\rangle = |+\rangle \quad H |1\rangle = |-\rangle$$

Alors

$$H^\dagger |+\rangle = |0\rangle \quad H^\dagger |-\rangle = |1\rangle$$

États distinguables

Théorème: k états sont parfaitement distinguables ssi ils sont orthogonaux deux à deux.

Preuve: $\Leftarrow$

Soient $|e_1\rangle, \dots, |e_k\rangle$ k vecteurs orthonormaux dans $\mathcal{H}_n$. On peut compléter cette base en ajoutant $n - k$ vecteurs $|e_{k+1}\rangle, \dots, |e_n\rangle$ tels que les n vecteurs forment une base orthonormale de $\mathcal{H}_n$.

Soit $U = \sum_{i=1}^n |e_i\rangle \langle i|$. Clairement $U^\dagger |e_i\rangle = |i\rangle$ et donc les états sont parfaitement distinguables.

Preuve: $\Rightarrow$

Si $|e_1\rangle, \dots, |e_k\rangle$ sont parfaitement distinguables, il existe une transformation unitaire U telle que $U |e_i\rangle = |b_i\rangle$ ou $|b_i\rangle$ est un vecteur de base. Comme les transformations unitaires préservent le produit interne et que les $|b_i\rangle$ sont orthogonaux, les $|e_i\rangle$ doivent eux aussi être orthogonaux.

Impossibilité du clonage

Théorème:

Il n'existe pas d'opération unitaire U telle que

$$U |x\rangle |0\rangle = |x\rangle |x\rangle .$$

Preuve:

Supposons au contraire qu'un tel U existe.

Soit $|u\rangle$ et $|v\rangle$ tel que $\langle u|v\rangle = \frac{1}{2}$.

On a $U |u\rangle |0\rangle = |u\rangle |u\rangle$ et $U |v\rangle |0\rangle = |v\rangle |v\rangle$ donc:

$$(\langle u| \langle 0|)(|v\rangle |0\rangle) = (\langle u| \langle u|)(|v\rangle |v\rangle)$$

$$\langle u|v\rangle \langle 0|0\rangle = \langle u|v\rangle \langle u|v\rangle$$

$$\frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

Contradiction!