

Informatique quantique IFT6155

Mesures partielles, téléportation
et codage dense

Mesure partielle

On peut mesurer une partie d'un registre quantique de façon à laisser le reste du registre en superposition.

Soit

$$|\psi\rangle \in \mathcal{H}_{AB}, |\psi\rangle = \sum_{i,j} \alpha_{ij} |i\rangle_A |j\rangle_B.$$

Si on mesure le registre A on observe i avec probabilité $p_i = \sum_j |\alpha_{ij}|^2$ et le registre se retrouve dans l'état $\sum_j \frac{\alpha_{ij}}{\sqrt{p_i}} |i\rangle_A |j\rangle_B$

La théorie quantique est *locale* en ce sens qu'une opération sur une partie d'un registre ne change pas le comportement du reste du registre.

On peut vérifier que dans tous les cas deux mesures indépendantes donnent la même distribution d'observations qu'une mesure conjointe.

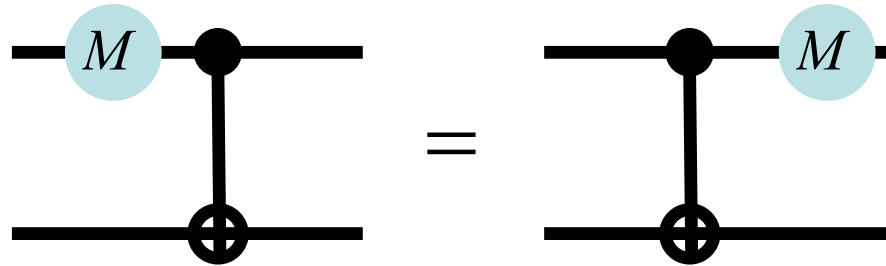
Mesure partielle



$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}H\mathcal{M}H|0\rangle &= H\mathcal{M}\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \\
 &= H\{(1/2, |0\rangle), (1/2, |1\rangle)\} \\
 &= \{(1/2, \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}), (1/2, \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}})\} \\
 &= \{(1/2, |0\rangle), (1/2, |1\rangle)\}
 \end{aligned}$$

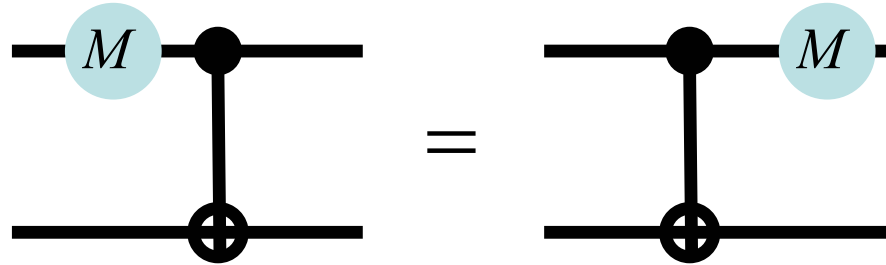
$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}HH|0\rangle &= \mathcal{M}|0\rangle \\
 &= \{(1, |0\rangle)\}
 \end{aligned}$$

Mesure partielle



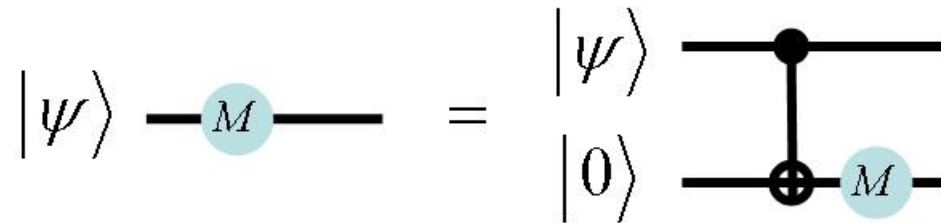
$$\begin{aligned}
 C-U(\mathcal{M} \otimes I) |\psi\rangle &= C-U(\mathcal{M} \otimes I)(\alpha_{00} |00\rangle + \alpha_{01} |01\rangle + \alpha_{10} |10\rangle + \alpha_{11} |11\rangle) \\
 &= C-U\left\{(|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2, \frac{|0\rangle (\alpha_{00} |0\rangle + \alpha_{01} |1\rangle)}{\sqrt{|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2}}, \right. \\
 &\quad \left. (|\alpha_{10}|^2 + |\alpha_{11}|^2, \frac{|1\rangle (\alpha_{10} |0\rangle + \alpha_{11} |1\rangle)}{\sqrt{|\alpha_{10}|^2 + |\alpha_{11}|^2}})\right\} \\
 &= \left\{(|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2, \frac{|0\rangle (\alpha_{00} |0\rangle + \alpha_{01} |1\rangle)}{\sqrt{|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2}}, \right. \\
 &\quad \left. (|\alpha_{10}|^2 + |\alpha_{11}|^2, \frac{|1\rangle U(\alpha_{10} |0\rangle + \alpha_{11} |1\rangle)}{\sqrt{|\alpha_{10}|^2 + |\alpha_{11}|^2}})\right\}
 \end{aligned}$$

Mesure partielle



$$\begin{aligned}
 (\mathcal{M} \otimes I)C-U |\psi\rangle &= (\mathcal{M} \otimes I)C-U(\alpha_{00} |00\rangle + \alpha_{01} |01\rangle + \alpha_{10} |10\rangle + \alpha_{11} |11\rangle) \\
 &= (\mathcal{M} \otimes I)C-U(|0\rangle (\alpha_{00} |0\rangle + \alpha_{01} |1\rangle) + |1\rangle (\alpha_{10} |0\rangle + \alpha_{11} |1\rangle)) \\
 &= (\mathcal{M} \otimes I)(|0\rangle (\alpha_{00} |0\rangle + \alpha_{01} |1\rangle) + |1\rangle U(\alpha_{10} |0\rangle + \alpha_{11} |1\rangle)) \\
 &= \{(|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2, \frac{|0\rangle (\alpha_{00} |0\rangle + \alpha_{01} |1\rangle)}{\sqrt{|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2}}, \\
 &\quad (|\alpha_{10}|^2 + |\alpha_{11}|^2, \frac{|1\rangle U(\alpha_{10} |0\rangle + \alpha_{11} |1\rangle)}{\sqrt{|\alpha_{10}|^2 + |\alpha_{11}|^2}})\}
 \end{aligned}$$

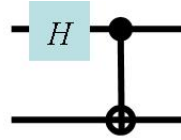
Mesure partielle



$$\mathcal{M}|\psi\rangle = \mathcal{M}\alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle = \{(|\alpha_0|^2, |0\rangle), (|\alpha_1|^2, |1\rangle)\}$$

$$\begin{aligned} (I \otimes \mathcal{M})C|\psi\rangle|0\rangle &= (I \otimes \mathcal{M})C(\alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle)|0\rangle \\ &= (I \otimes \mathcal{M})C(\alpha_0|00\rangle + \alpha_1|10\rangle) \\ &= (I \otimes \mathcal{M})(\alpha_0|00\rangle + \alpha_1|11\rangle) \\ &= \{(|\alpha_0|^2, |00\rangle), (|\alpha_1|^2, |11\rangle)\} \end{aligned}$$

Intrication



$$E = C(H \otimes I) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E |00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) = |\varphi^+\rangle$$

$$E |01\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle) = |\psi^+\rangle$$

$$E |10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle) = |\varphi^-\rangle$$

$$E |11\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) = |\psi^-\rangle$$

Les quatre états de Bell forment une base pour $\mathcal{H}_2^{\otimes 2}$.

Invariance

Nous avons démontré en devoir que

$$\forall U, U \otimes U |\psi^-\rangle = e^{i\theta} |\psi^-\rangle$$

Nous avons aussi que

$$H \otimes H |\varphi^+\rangle = |\varphi^+\rangle$$

$$N \otimes N |\varphi^+\rangle = |\varphi^+\rangle$$

$$R_y(\theta) \otimes R_y(\theta) |\varphi^+\rangle = |\varphi^+\rangle$$

Codage dense

Tout état de Bell peut être transformé en un autre par une opération sur le premier qubit.

$$|\varphi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

$$\begin{aligned} |\psi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle) = (N \otimes I) |\varphi^+\rangle \\ |\varphi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle) = (Z \otimes I) |\varphi^+\rangle \\ |\psi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) = (ZN \otimes I) |\varphi^+\rangle \end{aligned}$$

Alice et Bob partagent un état $|\varphi^-\rangle$.

- Alice choisit l'un des quatre états de Bell
- par une opération sur son qubit, Alice transforme la paire dans la paire de son choix
- Alice envoie son qubit à Bob
- en utilisant $E^\dagger$, Bob apprend quel est l'état (2 bits).

$1 \text{ ebit} + 1 \text{ qubit} = 2 \text{ bits}$

Téléportation?

Peut-on téléporter un qubit? Par téléportation, on entend la transmission exacte d'un état quantique par communication classique.

La description d'un qubit nécessite deux nombres complexes. Ce qui est une quantité non bornée de bits classiques. Donc la téléportation est impossible.

Il est impossible de copier un qubit qui est dans un état inconnu (impossibilité du clonage); par conséquent la téléportation est impossible.

Pourtant on peut téléporter un qubit inconnu malgré les restrictions données plus haut.

Téléportation

Richard Jozsa, William Wootters, Charles Bennett, Gilles Brassard, Claude Crépeau, Asher Peres.



Téléportation

Alice ont dans le passé partagé une paire EPR

$$|\varphi+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle).$$

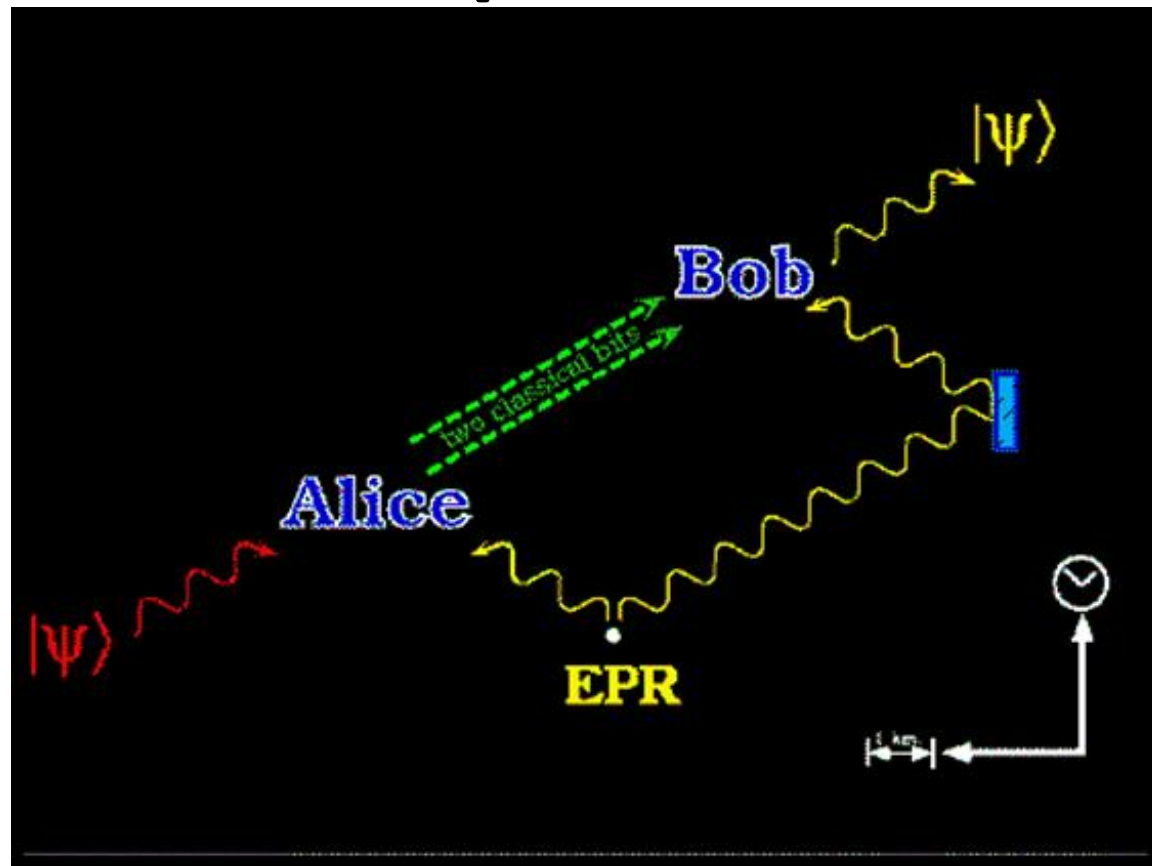
Plus tard, quand Alice et Bob sont séparés par une grande distance, Alice va recevoir le qubit *inconnu*

$$|X\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

et désire le transmettre à Bob.

En 1993 C.H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres, and W. Wootters ont solutionné ce problème. Deux bits de communication classique sont suffisants.

Téléportation



Téléportation

$$\begin{aligned}
 |X\rangle |\varphi^+\rangle = & \quad (1/2) |\varphi^+\rangle (|X\rangle) \\
 & + (1/2) |\psi^+\rangle (N |X\rangle) \\
 & + (1/2) |\varphi^-\rangle (S |X\rangle) \\
 & + (1/2) |\psi^-\rangle (NS |X\rangle)
 \end{aligned}$$

$$(E^\dagger \otimes I) |X\rangle |\varphi^+\rangle =$$

$$\begin{aligned}
 & (1/2) |00\rangle (|X\rangle) \\
 + & (1/2) |01\rangle (N |X\rangle) \\
 + & (1/2) |10\rangle (S |X\rangle) \\
 + & (1/2) |11\rangle (NS |X\rangle)
 \end{aligned}$$

$1 \text{ ebit} + 2 \text{ bits} = 1 \text{ qubit}$

Téléportation

$$\begin{aligned}
 & (E^\dagger \otimes I) |X\rangle |\varphi^+\rangle \\
 &= (E^\dagger \otimes I) (\alpha |0\rangle |\varphi^+\rangle + \beta |1\rangle |\varphi^+\rangle) \\
 &= (E^\dagger \otimes I) \left(\alpha |0\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) + \beta |1\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \right) \\
 &= (E^\dagger \otimes I) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha |000\rangle + \alpha |011\rangle + \beta |100\rangle + \beta |111\rangle) \right) \\
 &= \frac{1}{2}(\alpha(|00\rangle + |10\rangle)|0\rangle + \alpha(|01\rangle + |11\rangle)|1\rangle + \\
 &\quad \beta(|01\rangle - |11\rangle)|0\rangle + \beta(|00\rangle - |10\rangle)|1\rangle) \\
 &= \frac{1}{2}(\alpha |000\rangle + \beta |001\rangle + \alpha |011\rangle + \beta |010\rangle + \\
 &\quad \alpha |100\rangle - \beta |101\rangle + \alpha |111\rangle - \beta |110\rangle) \\
 &= \frac{1}{2}(|00\rangle (\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle) + |01\rangle (\alpha |1\rangle + \beta |0\rangle) + \\
 &\quad |10\rangle (\alpha |0\rangle - \beta |1\rangle) + |11\rangle (\alpha |1\rangle - \beta |0\rangle)) \\
 &= \frac{1}{2}(|00\rangle |X\rangle + |01\rangle (N |X\rangle) + |10\rangle (S |X\rangle) + |11\rangle (NS |X\rangle))
 \end{aligned}$$

Circuit de téléportation

